双曲線の定義

2定点F, F'からの距離の差が一定である点Pの軌跡を双曲線と言い、点F, F'をその焦点と言う。

双曲線の方程式

$F(c,0)$, $F'(-c,0)$ からの距離の差が $2a$ である点 P（但し $c>a>0$）

$|PF-PF'|=2a$ から

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を2乗して

$$(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$-a^2-cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

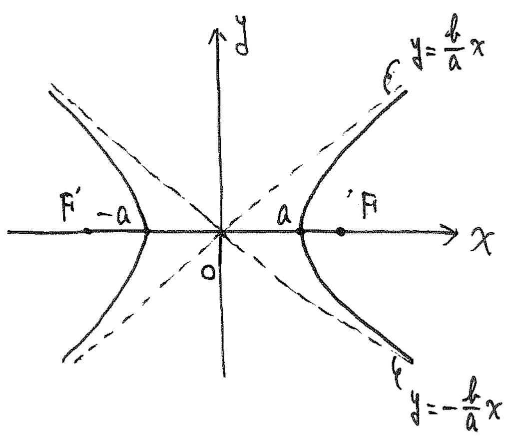
両辺を2乗して

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$\sqrt{c^2-a^2}=b$ とおいて $(b>0)$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



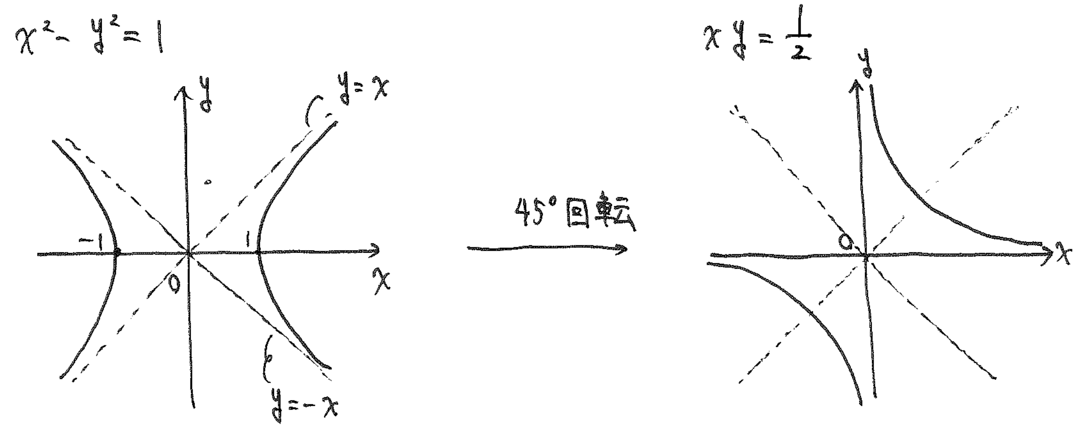
このとき

- 焦点 $(\sqrt{a^2+b^2},0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2},0)$
- 漸近線：$y=\pm\frac{b}{a}x$

となる。

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ より } y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ \text{ここで} \\ \frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right) \\ =\frac{ab}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0\end{array}}$$

$x^2-y^2=1$ と $xy=\frac{1}{2}$ との関係



（行列を用いた解法が一般的です）

原点を中心に45°回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

従って点 (x,y) は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-y \\ x+y\end{pmatrix}$$ に移るから、

点 $P(x,y)$ を45°回転した点を $P'(X,Y)$ とすると

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

点Pが $x^2-y^2=1$ 上の点のとき

$(x+y)(x-y)=1$ より

$$\sqrt{2}Y\cdot\sqrt{2}X=1 \qquad \therefore XY=\frac{1}{2}$$

（本質的には極座標を用いた解法と同じですが、1次変換の考え方を知っていると多少は処理が楽です）