◦半角の公式

$$\boxed{\begin{aligned} &① \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \\ &② \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \end{aligned}}$$

(証明)

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$
$$= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \qquad \therefore \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

また

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 \quad より \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

◦積和の公式

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}}$$

(証明)

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ①$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ②$$

$$① - ② : \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$$

◎ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ の計算

(i) $m=n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2} dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \pi$$

(ii) $m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

(i)(ii)より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

※倍角、積和は次数を下げられるため
積分計算では非常に有効です。